Types et modularité.

Didier Rémy
2001 - 2002

http://cristal.inria.fr/~remy/mot/12/
http://www.enseignement.polytechnique.fr/profs/informatique/Didier.Remy/mot/12/

Cours	**Exercices**
1. La programmation par les types 2. Repliages et itérateurs 3. Separation des concepts	1. Fold 2. Fold structuré 3. Ramassage efficace 4. Unification

Slide 1

La programmation dirigée par les données

Slide 2

Une idée forte en programmation est que la programmation est dirigée par les données. Cela signifie que la représentation des données induit naturellement des algorithmes de manipulation des données.

En quelque sorte, le choix de représentation des données joue un rôle primordiale dans cette vision. Ne vous a-t-on jamais dit :

- *Les listes sont des structures de données récursives, donc elles se parcourent naturellement par des fonctions récursives ?*
- *Inversement, les tableaux qui sont une structure de donnée énumérée se parcourent plus par des boucles for.*

Commes toutes règles, elles sont sujettent à exceptions, bien sûr.

Une librairie qui implémente une structure de donnée complexe est en général accompagnée de fonctions permettant la manipulation "naturelle" de cette structure.

La programmation par les types

Slide 3

La programmation polytypique prolonge l'idée de programmation dirigée par les données. Comme les types sont la représentation des données, la programmation est donc au final dirigée par les types.

Une collection peut être représentée par une liste, un tableau ou un ensemble, mais les opérations élémentaires sur les collections restent indépendentes de la représentation :

- (`find`) Trouver un élément
- (`iter`) Itérer une opération (effet de bord) sur chaque élément
- (`map`) Éventuellement, transformer une collection en une autre de même structure (map)
- (`fold`) Appliquer une transformation sur les éléments de la collection en collectant les résultats. Ici la collection des résultats est une fonction passée en paramètre, donc pas nécessairement dans la même structure.

Les librairies `List`, `Array`, `Set`, `Map`, *etc.* fournissent toutes ces opérations de bases, mais chaque fois implémentés manuellement.

Programmation polytypique

Slide 4

Dans une certaine mesure, certains opérations pourraient être déduites de la structure de type.

Prenons par exemple, une définition des arbres binaires.

```
type ('a) tree = Leave of 'a | Node of 'a tree * 'a tree;;
```

Il y a un itérateur "naturel" sur cette structure :

```
let rec iter_tree f = function
  | Leave x -> f x
  | Node (a, b) -> iter_tree f a; iter_tree f b;;
```

ainsi qu'un homomorphisme "naturel" :

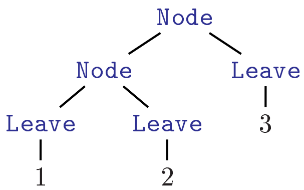
```
let rec map_tree f = function
  | Leave x -> Leave (f x)
  | Node (a, b) -> Node (map_tree f a, map_tree f b);;
```

La fonction fold, graphiquement

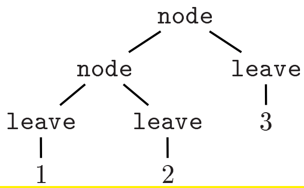
Slide 5

La forme de repliage d'une structure de donnée, qui généralize `iter` ou `map` n'est guère plus difficile :

`tree_fold leave node`



Retourne l'arbre de calcul :



Noter le parallèle entre données et calcul

Fold (le code)

Slide 6

```
let rec tree_fold leave node =
  let rec fold = function
    | Leave x ->
       leave x
    | Node (t1, t2) ->
       node (fold t1) (fold t2)
  in fold;;
```

La traduction peut se laisser guider par les types comme suit : la fonction `tree_fold` prend autant d'arguments `a1` ... `an` que le type `tree` a de constructeurs `A1` ... `An`.

Chaque fonction `ai` est d'aritée égale à celle du constructeur `Ai` et l'application `tree_fold a1 ... an v` revient à remplacer dans v chaque constructeur `Ak` par la fonction `ak`, puis à évaluer l'expression résultante.

Fold (example)

Slide 7

Appliquer `tree_fold leave node` à

```
Node (Node (Leave 1, Leave 2), Leave 3)
```

revient à évaluer

```
node (node (leave 1) (leave 2)) (leave 3).
```

Ce que l'on peut vérifier sur un cas concret :

```
tree_fold succ ( * )
(Node (Node (Leave 1, Leave 2), Leave 3))
              =
let leave = succ in let node = ( * ) in
node (node (leave 1) (leave 2)) (leave 3);;
```

− : bool = true

Cas particuliers

En utilisant la définition précédente, la fonction `list_fold` est égale à `fold_right` (modulo réarrangement des arguments) :

```
let list_fold cons nil list =
  List.fold_right cons list nil;;
```

Slide 8

Cette fonction n'est pas récursive-terminale. Pour le cas particulier des listes, on utilise couramment `fold_left` qui est récursive terminale. Cela revient à appliquer `fold_right` sur la liste retournée.

> `fold_left cons' nil t` produit le même résultat que
> `list_fold cons nil (reverse t)` où `cons' x y` is `cons y x`.

(Bien sûr le calcul est effectué directement sans retournement de la liste.)

La forme `fold_left` est une particularité des listes et ne se généralise pas : dès qu'il y a plusieurs directions de récursion, il n'y a plus de forme récursive terminale évidente.

Size

C'est un cas particulier de `tree_fold` : chaque fonction `ak` retourne un entier qui mesure la taille du sous-arbre issu de `Ak` correspondant, qui ne doit dépendre que la taille que de `Ak` et de la taille des sous-arbres respectifs.

Slide 9

Version spécialisée de fold

```
let tree_size leave node t : int = tree_fold leave node t;;
```

```
val tree_size : ( 'a -> int) -> (int -> int -> int) -> 'a tree -> int
```

Pour les listes

La fonction length est une instance de size qui prend zéro pour le poids de du nœud `[]` et 1 pour le poid du nœud `::`.

```
let length a_list =
  list_fold (fun a length -> length + 1) 0 a_list;;
```

Iterators

C'est un cas particulier de `fold` : chaque function `ak` retourne `()`.

Dans les itérateurs, les arguments du type récusif `tree` dans `ak` attendent un valeur de type unit, et sont inutiles. Ils peuvent être supprimés et l'arité de `ak` décroît d'autant.

Slide 10

Des variations sont possibles selon l'ordre d'évaluation des appels récursifs. Évidemment les `ak` ne sont utiles que pour leurs effets de bord, donc l'ordre d'évaluation est primordiale. (Le plus couremment utilisé étant un parcours en profondeur, de gauche à droite).

Inversement, l'orde de calcul d'un `fold` peut ne pas être spécifié, (c'est le cas en Ocaml) car en général un fold n'est pas (ne doit pas) être utilisé pour faire des effets de bords.

Généralization

À tous les types

La démarche s'applique également aux types mutuellement récursifs.

Les types sont construits en combinant des déclarations de types somme, enregistrements, et des types de bases (entier, tuples, *etc.*).

Slide 11

On sait donc construire des fonctions de repliage (fold) de façon systématique pour tous les types déclarés.

À d'autres fonctions

Le cas de la fonction `fold` est assez général et le plus fréquemment utilisé.

Nous avons montré des sous cas de la fonction fold.

Ils existent d'autres formes qui ne correspondent pas à fold (*e.g.* itération) notemment pour des parcours d'arbres dans un ordre différent.

Cas général

Slide 12

Question

Peut-on programmer des fonctions telles `fold` une fois pour toute, par filtrage sur la structure du type de l'argument, puis en obtenir automatique des versions spécialisés pour chaque type ?

Réponse

C'est ce qu'on appelle la programmation polytypique.

Difficultés

- Essentiellement de typage.
- Ce sont des travaux en cours de recherche...
- À la rigueur, on pourrait fournir quelques fonctions polytypiques primitives, sans permettre à l'utilisateur d'en programmer de nouvelles (i.e. générer automatiquement les fonctions de repliage).

En pratique

Slide 13

Structuration du code Même sans support de la part du langage hôte, le programmation polytypique peut aider à structurer le code en séparant ce qui est
- ce qui est essentiel, que l'utilisateur devra impérativement fournir
- ce qui est secondaire, qui pourrait être déduit automatiquement de la structure des types (même, si le programmeur doit encore l'écrire manuellement).

Techniques et outils

En pratique, cela passe souvent par la séparation d'un type (trop) concret en
- en types abstraits.
- types concrets paramétrés.

Schématiquement

Slide 14

On veut implémenter une opération conséquence sur une structure.

1. On sépare la partie essentielle de cette structure (serveur) de la partie secondaire (client)
2. Le serveur ne doit pas dépendre de la partie secondaire
   – soit il l'importe de façon abstraite
   – soit il est paramétrique (polymorphe) par rapport à celle-ci.
3. Le client founit au serveur une version particulière de cette sous-structure, en passant au serveurs les opérations manipulant la sous-structure.
4. Ces fonctions sont écrire à la main mais de façon quasi-automatique.
5. Une modification du client est facile. (Il faut simplement redéfinir les fonctions de manipulation de la structure secondaire).

On peut utiliser un foncteur pour le code essentielle (serveur). Au final, on a écrit une librairie...

Expressions arithmétiques avec variables

Slide 15

C'est une exemple concret

Représentation directe et aplatie

```
type exp =
  | Var of string
  | Int of int
  | Plus of exp * exp

let rec eval env = function
  | Var x -> List.assoc x env
  | Int n -> n
  | Plus (e1, e2) -> eval env e1 + eval env e2;;
```

Approche plus générique

Utilisation de fonctionnelles

Exercise 1 *Donner la fonction* ***exp_fold****.* Answer

Montrer que ***eval*** *peut s'exprimer à l'aide de* ***exp_fold****.* Answer

Donner une version de ***exp_fold*** *avec arguments étiquetés permettant d'éviter tout confusion. Comparer avec l'écriture directe.* Answer □

Slide 16

Calcul des variables d'un terme

Calcul direct

```
let rec vars =
  function
    | Var x -> [ x ]
    | Int n -> []
    | Plus (e1, e2) ->
       vars e1 @ vars e2;;
```

Calcul avec fold

```
let vars =
  exp_fold
    ~var:(fun x -> [ x ])
    ~int:(fun n -> [])
    ~plus:(fun ve1 ve2 ->
       ve1 @ ve2);;
```

Slide 17

Exemple

```
let e = Plus (Var "x", Plus (Var "y", Int 0))
let test = vars e;;
```

```
val test : string list = ["x"; "y"]
```

– Le schéma de récursion est pris en compte par `exp_fold`, ce qui n'est pas le cas pour le pattern matching.

– En contrepartie, le pattern matching est plus géneral : il peut se faire en profondeur, ne pas considérer tous les cas, etc.

Slide 18

Slide 19

Séparation des concepts

Variations sur la structure de donnée

On peut envisager les modifications suivantes.

– Ajout d'un nœud `Times of exp * exp`
– Renommage du constructeur `Times` en `Produit`
– Ajout d'un nœud `Sigma of exp list`

Invariants

Dans tous ces cas, le calcul des variables est identique, peu importe la structure du terme sous-jacente. Il faut simplement collecter les variables en descendant récursivement dans la structure.

Séparation de la structure de termes

On décrit d'abord la structure de terme (ouverte) sans variable.

```
type 'a sexp = Int of int | Plus of 'a * 'a;;
```

Puis la structure récursive avec variables pour une structure de termes donnée.

```
type exp = Var of string | S of exp sexp;;
```

Code plus modulaire

Slide 20

```
let subexps = function
    Int _ -> []
  | Plus (e1,e2) -> [e1; e2]

let rec vars = function
  | Var x -> [ x ]
  | S s -> List.flatten (List.map vars (subexps s));;
```

Exercise 2 *Donner la fonction de repliage `sexp_fold`.* Answer
Le traitement du constructeur `S` dans la fonction `exp_fold` est plus difficile. Il est de type `exp sexp -> sexp`, donc la récursion se passe sous le constructeur de type `sexp`. Donner une version `exp_sexp_fold` de type :

```
var:(string -> 'a) -> s:('b -> 'a) ->
  int:(int -> 'b) -> plus:('a -> 'a -> 'b) ->
    exp -> 'a
```

qui remplace dans son argument les nœuds de l'arbre par les fonctions correspondantes. Answer

Slide 21

Définir une fonction "naturelle" `sexp_map_fold` de type

```
int:(int -> 'a) -> plus:('b -> 'b -> 'a) ->
f:('c -> 'b) -> 'c sexp -> 'a
```

qui prend un argument supplémentaire (par rapport à `exp_fold`) pour transformer les arbres du type paramètrique. En particulier, on devra retrouver les fonctions spécialisées `exp_fold` et `exp_map` en passant l'identité pour l'argument de nom `f` ou les constructeurs `Int` et `Plus` pour les arguments de nom `int` et `plus`. Answer
En déduire une écriture plus simple de `exp_sexp_fold`. Answer
Écrire la fonction `vars` à l'aide de `exp_sexp_fold`. Answer □

Robustesse par rapport aux variations

Slide 22

Une variation de structure ne nécessite que le changement de la fonction `subterms`. Par exemple,

```
type 'a sexp =
    Int of int | Sigma of 'a list | Prod of 'a list
let subexps = function
  | Int _ -> []
  | Sigma l -> l
  | Prod l -> l;;
```

– Les autres fonctions sont inchangées
– Toutefois, elle doivent être réévaluées, car `sexp` a changé
– Utilisation d'un foncteur pour partager la partie commune.

Fonctorisation

Slide 23

Expressions avec variables à partir de leur forme aplatie

```
module V0 = struct
  module type Sexp =
    sig
      type 'a t
      val subexps : 'a t -> 'a list
    end
  module Exp (S : Sexp) =
    struct
      type 'a sexp = 'a S.t
      type t = Var of string | S of t sexp
      let rec vars = function
        | Var x -> [ x ]
        | S s -> List.flatten (List.map vars (S.subexps s))
    end;;
```

Fonctorisation (suite)

Slide 24

La partie aplatie (suite)

```
module S =
  struct
   type 'a t = Int of int | Plus of 'a * 'a
   let subexps = function
       Int _ -> []
     | Plus (e1, e2) -> [e1; e2]
  end
end;;
module E = V0.Exp(V0.S)
open V0.S open E
let e = S(Plus (Var "x", S(Plus (Var "y", S(Int 1)))));;
let _ = vars e;;
```

Ajout d'une fonction d'évaluation

Slide 25

Enrichissement du foncteur

```
module V1 = struct
  module type Sexp =
    sig
      include V0.Sexp
      val eval : ('a -> int) -> 'a t -> int
    end
  module Exp (S : Sexp) =
    struct
      module Exp0 = V0.Exp (S)
      include Exp0
      let rec eval env = function
        | Var x -> List.assoc x env
        | S s -> S.eval (eval env) s
    end;;
```

Ajout d'une fonction d'évaluation

Slide 26

Enrichissement de la structure

```
  module S1 =
    struct
      include V0.S
      let eval f = function
          Int n -> n
        | Plus (e1, e2) -> f e1 + f e2
    end
end;;
```

Test

```
module Exp1 = V1.Exp(V1.S1)
open V1.S1 open Exp1
let e = S(Plus (Var "x", S(Plus (Var "y", S(Int 1)))))
let _ = eval ["x", 10; "y", 20] e;;
```

Ajout d'une fonction d'évaluation

Slide 27

Ajout à la structure (revient à une modification)

```
module S1' = struct
  type 'a t =
      Int of int | Sigma of 'a list | Prod of 'a list
  let subexps = function
    | Int n -> []
    | Sigma l -> l
    | Prod l -> l
  let eval f = function
    | Int n -> n
    | Sigma vl -> List.fold_left ( + ) 0 (List.map f vl)
    | Prod vl -> List.fold_left ( * ) 1 (List.map f vl)
end;;
module E1' = V1.Exp(S1');;
```

Applications

Slide 28

Exemples

- Un évaluateur, en séparant la structure de varriable et la gestion de l'environnement des autres concepts (primitives et leur évaluation).
- On peut de façon similaire écrire un algorithme d'unification abstrait par rapport à la structure de terme.

Avantages

- On peut facilement modifier la structure des termes sans avoir à réécrire l'algorithme d'unification.
- Les termes abstraits (vus par l'algorithme d'unification) ne voient pas leur implémentation concrète : un symbol (abstrait) peut être représenté par plusieurs nœud (concrets).

Conclusions

Slide 29

On retrouve un mélange de motifs connus

Sujet-observateur ou motif en peigne :

- Le type exp est casé en type `'a sexp` et la partie récursive
- On peut modifier indépendemment les deux parties de la structures, sans dépendre ni affecter l'autre
- On doit assembler les deux structures avant de les utiliser.
- Une fois assemblées les structures ne sont plus modifiables motif

Programmation polytypique

En séparant dans structure de donnée les parties essentielles des parties secondaires :

- Les détails sont séparés du code principale,
- Cela rends le code principal plus lisible, plus réutilisable,
- Les détails deviennet réguliers et pourraient (à l'avenir) être générés mécaniquement

Exercise 3 (Rammassage efficace) *Quel est la complexité de la fonction* **`vars`** *ci-dessus ?* Answer

Donner une implémentation directe de **`vars`** *de complexité linéaire (on ramassera les variables dans une liste qu'on passe de nœud en nœud.* Answer

Montrer que l'on peut écrire une version analogue de **`vars`** *à partir de la fontion* **`exp_fold`**. Answer □

Exercise 4 (Unification) *Implémenter un algorithme d'unification en séparant la représentaion concrète des termes de la structure de termes*

Donner deux instances de l'algorithme d'unification, par exemple, l'un minimal avec une structure de termes comprennat seulement un symbol d'arité deux et un symbol constant, l'autre comprenant en plus un symbol d'arité variable. □

1 Solutions des exercices

Exercise 1, page 16

```
let exp_fold var int plus =
  let rec fold = function
  | Var x -> var x
  | Int n -> int n
  | Plus (e1, e2) -> plus (fold e1) (fold e2) in
  fold;;
```

```
  val exp_fold :
    (string -> 'a) -> (int -> 'a) -> ('a -> 'a -> 'a) -> exp -> 'a = <fun>
```

Exercise 1 (continued)

```
let eval env =
  exp_fold (fun x -> List.assoc x env) (fun x -> x) ( + );;
```

```
  val eval : ( string * int) list -> exp -> int = <fun>
```

```
eval ["x", 10] (Plus (Plus (Var "x",Int 4), Int 5));;
```

```
  - : int = 19
```

Exercise 1 (continued)

```
let exp_fold ~var ~int ~plus = exp_fold var int plus;;

let eval env =
  exp_fold
    ~var:(fun x -> List.assoc x env)
    ~int:(fun n -> n)
    ~plus:(fun e1 e2 -> e1 + e2);;
```

Noter la similitude avec la définition directe. Ici, la seule différence est que les appels récursifs sont effectués par `exp_fold`.

Exercise 2, page 20

```
let sexp_fold ~int ~plus = function
  | Int n -> int n
  | Plus (e1, e2) -> plus e1 e2;;
```

Exercise 2 (continued)

```
let exp_sexp_fold ~var ~s ~int ~plus =
  let rec fold = function
    | Var x -> var x
    | S z ->
       s (sexp_fold
           ~int
           ~plus:(fun e1 e2 -> plus (fold e1) (fold e2))
           z) in
  fold;;
```

Exercise 2 (continued)

```
let sexp_fold ~int ~plus ~f = function
  | Int n -> int n
  | Plus (e1, e2) -> plus (f e1) (f e2);;
```

Exercise 2 (continued)

```
let exp_sexp_fold ~var ~s ~int ~plus =
  let rec fold = function
    | Var x -> var x
    | S z -> s (sexp_fold ~int ~plus ~f:fold z) in
  fold;;
```

Exercise 2 (continued)

```
let vars e =
  exp_fold
    ~var:(fun x -> [x])
    ~s:(fun l -> l)
    ~int:(fun n -> [])
    ~plus:( @ )
    e;;
```

Exercise 3, page 15

La complexité de est en $O(n^2)$ car dans le cas le pire (une liste balancée à droite), on effectuera n appels à append chacun d'un coût allant de 1 à n.

Exercise 3 (continued)

```
let vars e =
  let rec visit collect = function
    | Var x -> x :: collect
    | Int n -> collect
    | Plus (e1, e2) -> visit (visit collect e1) e2
  in visit [] e;;
let e = Plus (Var "x", Plus (Var "y", Int 0));;
vars e;;
```

Exercise 3 (continued)

```
let vars e =
 exp_fold
  ~var:(fun x collect -> x :: collect)
  ~int:(fun n collect -> collect)
  ~plus:(fun ve1 ve2 collect -> ve1 (ve2 collect))
```

```
 e
 []
;;
vars e;;
```